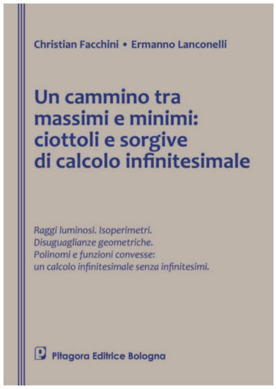
RECENSIONI E PREFAZIONI

Facchini, C., & Lanconelli, E. (2021). *Un cammino tra massimi e minimi: ciottoli e sorgive di calcolo infinitesimale*. Bologna: Pitagora.



Recensione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Il *contenuto* di questo denso e piacevole libro è laconicamente ma chiaramente descritto in copertina:

> Raggi luminosi. Isoperimetri.
> Disuguaglianze geometriche.
> Polinomi e funzioni convesse:
> un calcolo infinitesimale senza infinitesimi.

La frase finale sembra uno scherzo, ma vedremo che non è così, è proprio la verità…

Il *modo* nel quale si presenta questo volume è ben descritto nel titolo, che potrebbe lasciare perplessi: "ciottoli e sorgive". Visto che si tratta di un "cammino", ipotizziamo che esso avvenga non su una strada lastricata ma lungo un sentiero nel bosco. Il viandante vi incontra dunque "ciottoli" che possono essere anche interpretati come asperità; e "sorgive" cioè piccoli affioramenti di acque sotterranee, minuscole sorgenti, come capita appunto nei viottoli nei boschi, specie se di montagna …

La metafora si svela da sé, non appena ci si inoltra nel viottolo, pardon, nella lettura …

Sorprende piacevolmente il rinvio colto e raffinato continuo, fra risultati matematici del recente passato e informazioni storiche sulla base delle quali tali risultati sono fondati; man mano che si procede si ha la bella meraviglia, la piacevole sorpresa, la culturalmente ghiotta occasione di un'allusione continua a risultati di base, anche del passato antico, fino alla cultura matematica attesa, quella di base dei tempi nostri. L'indice del libro, cioè il sunto dei contenuti, è presto fatto.

- Medie geometriche, medie aritmetiche, come base dei problemi isoperimetrici (e qui si trova di tutto, come base appunto, perfino la famosa dimostrazione del presidente USA Garfield del teorema di Pitagora e il teorema di Erone, una bella passeggiata storica avvincente).
- Medie in due variabili e disuguaglianze classiche significative, e ancora Erone.
- Proprietà classiche isoperimetriche dei poligoni regolari, con spunti storici basati sui lavori di Zenodoro, Brahamagupta e Bretschneider.
- Continuità e completezza, con ovvie citazioni di Dedekind.
- Analisi infinitesimale algebrica delle funzioni polinomiali, con richiami a Ruffini, Rolle e Weierstrass.

- Funzioni convesse e analisi infinitesimale geometrica. Attraente in particolare il paragrafo sui minimi delle funzioni convesse, con un riferimento a metodi che richiamano Fermat.
- Medie in più variabili, presentazione della disuguaglianza di Young.
- Studio delle riflessioni che chiama in causa specchi di diverse forme geometriche, ma anche sulla rifrazione, nella quale si cita la legge di Snell e, a mo' di esercizio, la proposta del famoso "problema del bagnino" lanciato da Feynman.

Ce n'è per tutti, con estrema attenzione ai dettagli, con mille figure che illustrano ogni minimo passaggio, alcune anche a colori.

L'attenzione per così dire didattica è formidabile, colta, profonda, generosa, attenta; il processo esplicativo non lascia nulla al caso o alla sola intuizione: il lettore è accompagnato in questo "cammino" (non dimentichiamo la metafora) passo dopo passo, da due esperte guide alpine … Un altro grande aiuto didattico è costituito dal sempre presente paragrafo che chiude ciascun capitolo, dedicato alla proposta, formulazione e risoluzione di esempi (mai banali) dei contenuti appena trattati.

Ma, finalmente: che cosa significava quella strana frase scorta in copertina: "un calcolo infinitesimale senza infinitesimi"?

Prima di rispondere, riteniamo necessaria una breve premessa.

Proprio recentemente noi prefattori abbiamo scritto in un articolo e sostenuto in conferenze che uno dei concetti più diabolicamente complicati della matematica è quello di limite. Lo studente impara a memoria la sua definizione, la ripete anche bene al proprio docente che gliela chiede, ma … capirla è altra cosa. Con esempi tratti dalla ricerca didattica in aula, illustravamo che si tratta di uno dei concetti più sottilmente complessi dell'intero edificio matematico e arrivavamo ad affermare che riteniamo che la quasi totalità degli studenti non riesce a farsi una costruzione cognitiva significativamente corretta di quell'oggetto matematico misterioso.

E allora, che dire della bella sorpresa nel vedersi scritto dai nostri due autori, Christian ed Ermanno, che essi sono stati condotti "a sviluppare un calcolo infinitesimale per le funzioni polinomiali e per le funzioni convesse che ha il pregio di non richiedere l'uso degli infinitesimi; precisamente un calcolo differenziale che non esige la complessa nozione di limite, ma soltanto la proprietà di continuità della retta reale". Sembra un sogno: ma allora siamo sulla stessa linea didattica! Ne siamo felici.

Ma chi è il destinatario di questo testo?

Secondo noi è un libro piacevole e dotto che, proprio per le particolarità e le peculiarità dette finora, può essere letto da tutti i curiosi, basta che possiedano le competenze di base espresse sopra. E poi, in particolare, lo raccomandiamo a quei docenti che si preparano a tenere corsi su questi temi; agli studenti universitari che debbano affrontare questi temi e che vogliano vederne tutti gli aspetti, anche i più elementari. Lo vediamo bene anche come libro di collegamento fra scuola secondaria di II grado e facoltà scientifiche universitarie; in molti altri testi abbiamo visto questi temi accennati o trattati quasi con sufficienza; qui se ne vede bene il senso, la base, lo sviluppo storico, matematico ma anche didattico. Gli autori accompagnano il lettore passo dopo passo, sembra quasi che lo vogliano convincere.

Un libro avvincente, dunque, che raccomandiamo con entusiasmo.

Marrone, C., & Venger A. M. (2021). *La tradizione dei Maestri costruttori. Quaderno 1. La lapide tombale di Hugues Libergier*. S. Demetrio Corone (CS): Irfan Edizioni.

Recensione di Bruno D’Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Nel corso del XIII secolo venne costruita dall’architetto Hugues Libergier (1229 – 1263) a Reims la chiesa abbaziale benedettina di Saint-Nicase; ma poi, durante la Rivoluzione francese, esattamente nel 1794, essa fu venduta come cava di pietre e materiale edilizio vario … Delle meraviglie che certo conteneva si salvò ben poco, di certo la lastra tombale dello stesso architetto che l’aveva costruita. Questo prezioso documento storico-artistico fu traslato ed è ora conservato nella cattedrale di Notre Dame della stessa città.

La pietra tombale in questione è di forma rettangolare, ricca di incisioni colmate con piombo fuso; esse rappresentano colonnine che sorreggono un arco, sulla cima del quale appare una ghimberga, cioè un frontone appuntito; l’immagine dello stesso architetto che mostra in una mano il modello di una chiesa e nell’altra un tipico strumento di misura dell’epoca, una pertica; ai suoi piedi appaiono un compasso e una squadra. Tutt’attorno vi sono numerose lettere che costituiscono un’epigrafe disposta a mo’ di rettangolo lungo il contorno della pietra stessa.

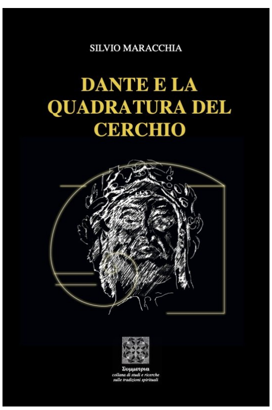
Seguendo una tradizione plurisecolare ben nota, ma della quale tecnicamente e storicamente noi sapevano ben poco, le due autrici di questo libro hanno analizzato in tutti i suoi dettagli matematici, soprattutto geometrici, ma anche aritmetici, ogni elemento di questa raffigurazione tombale, arrivando a mostrare sottili relazioni, mille sottigliezze semiotiche, moltissimi riferimenti aventi a che fare con misure di lunghezze, ampiezze di angoli, relazioni numeriche la cui base è spesso filosofica, relazioni che chiamano in causa armonie geometriche e aritmetiche, per esempio legate alla ricorrenza o alla citazione implicita di vari teoremi di geometri classici, la successione di Fibonacci, relazioni armoniche basate per esempio sul numero aureo di Fidia. E mille ancora.

Nulla di quanto appare rappresentato su questa pietra sembra essere casuale: ogni relazione, ogni dato, ogni riferimento si mostra oggi, grazie a questa precisa analisi; ogni segmento ha inclinazione, lunghezza, intersezioni che rimandano a interpretazioni intrinseche; ogni poligono ha una sua funzione, che sia un triangolo rettangolo, equilatero o altro; successioni di poligoni regolari si evidenziano in modo chiarissimo, dopo la dettagliata e illuminante analisi delle autrici, il che sarebbe stato impossibile a un osservatore, per quanto attento e acuto, se non ci fosse stato uno studio dotto, esplicito, organizzato, attento da parte di due esperte specifiche. Ogni circonferenza ha una sua funzione significativa. Grazie ad aritmetica e geometria così svelate, si giunge a dare un senso a quelle lettere che costituiscono la cornice, come abbiamo detto; la quale assume significati assai celati, che solo questo tipo di indagine permette di cogliere. E poi ci sono i labirinti, con il loro fascino plurisecolare, che hanno funzioni mistiche assai significative. E tanto altro.

Sorprende il fatto che le due autrici citino decine e decine di matematici classici, soprattutto greci e arabi, dando prova di una competenza inattesa, ma necessaria, visto che la ragione, il fondamento, la base di questi calcoli hanno secoli di tradizione, cosa che due matematici, per quanto appassionati di storia, non potevano supporre.

Ansiosi come siamo sempre di mostrare concretamente a tutti coloro che mettono in dubbio l'importanza e la presenza della matematica in ogni dove (il nostro proposito è di mostrare che *la matematica è dappertutto*), troviamo in questo studio un esempio non proprio del tutto inatteso, ma certo non immaginabile a priori, così matematicamente ricco.

Maracchia, S. (2022). *Dante e la quadratura del cerchio*. Roma: Simmetria Edizioni.



Recensione di Bruno d'Amore

Il titolo di questo breve lavoro di Silvio fa riferimento solo a uno dei diversi temi trattati; in realtà nel libro si affrontano molteplici sfaccettature di quelle che possiamo descrivere come le citazioni matematiche nell'opera complessiva di Dante.

Molti sono di fatto gli argomenti proposti, di carattere aritmetico, geometrico, logico, coinvolgenti tutta l'opera di Dante, non solo la *Comedìa*, anche il

Convivio, la *Monarchia*, la *Questio de aqua et terris*.

Alcune sono fra le più note, quelle alle quali molti di noi autori di questo specifico settore facciamo sempre riferimento, trattate con l'acume usuale cui Silvio ci ha abituato nelle sue opere; altre sono più sottili, di stampo filosofico o, meglio, epistemologico. Sulle quali torneremo.

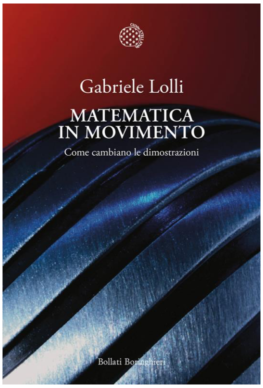
Uno dei temi che appassionano coloro che vogliono analizzare le citazioni matematiche di Dante è quello relativo alla sua formazione matematica: come si è costruita, su quali testi, di quali autori. Per esempio, Dante aveva letto davvero l'opera di Fibonacci? Davvero aveva almeno sentito parlare di quella di Archimede, dato che non poteva averla conosciuta direttamente? Fino a che punto si era spinto nell'esaminare Euclide? E la logica? Che logica conosceva? Com'è possibile che più d'uno tra noi voglia vedere suoi riferimenti al teorema cosiddetto dello Pseudo Scoto (attribuito da alcuni decenni a Giovanni di Cornovaglia)? Come distingueva il modo di creare la matematica, in particolare la geometria di Euclide e dei grandi matematici greci, rispetto al modo di trattarne di Aristotele? Avendo dedicato diversi decenni a questi studi, so che tale problematica non si risolverà, forse mai; ma trovo corretto che ogni autore-studioso che se ne occupi faccia proposte personali, documentate con quanto è disponibile oggi, grazie agli studi sempre più critici, profondi, analitici che rapidamente si susseguono. E questo di Silvio è un bell'esempio di come procedere, con cautela ma anche con coraggio, soprattutto quando si possono citare fonti o riferimenti a difesa del proprio modo di concepire, delle proprie intuizioni.

Trovo affascinante il tentativo di proporre al lettore un Dante epistemologo moderno, dunque non costretto dal fascino aristotelico a difendere la dimostrazione in matematica (in particolare in geometria) soggetta alla prassi greca che vede nel sillogismo il trionfo del "se allora". La moderna logica, oramai quasi cent'anni dopo Gödel, è diversa assai e poca fede riserva alle caratteristiche che dominavano la cultura matematica greca classica e ancora quella medioevale. Oggi le cose sono evolute o, almeno, modificate; e, come scrivono molti altri autori a questo proposito, la logica ha cambiato aspetto, scopo, attenzione, volgendosi più alla metamatematica che alla logica in sé. "Una scienza organizzata come sistema ipotetico-deduttivo non sarebbe in grado di autogiustificarsi", scrive Silvio a pagina 61.

Questo è, a mio avviso, il tema centrale e forse il più interessante di questo libro; e costituisce la spiegazione del capitolo finale, nel quale il nostro Autore racconta di un sogno suggestivo e rivelatore avvenuto in "un giardino costituito di aree ben curate colme di fiori", nel quale incontra personalmente Dante, che lo riconosce e che dimostra di aver letto le sue opere. E Dante, appunto, si rivela per come Silvio vuole che sia, un creatore che crede alla matematica come "costruzione dello spirito umano, fatta di relazioni, di simmetria e, soprattutto, di infinito e non dipendente dalle cosiddette dimostrazioni", le quali "offuscano lo spirito matematico" essendo "un peso inutile per chi giunge agli stessi risultati per intuizione, per illuminazione, per magia quasi”.

Il sogno di Silvio è rivelatore. Non so se corretto fino in fondo per un personaggio del Medioevo, ma certo affascinante.

Lolli, G. (2022). *Matematica in movimento. Come cambiano le dimostrazioni*. Torino: Bollati Boringhieri.



Recensione di Bruno D’Amore

Perfino fra le persone che si autoreputano colte in matematica c’è talvolta (anzi: spesso) la diffusa convinzione che la nostra disciplina sia una specie di sacrario storicizzato perenne, senza mutamenti; che i paladini dei contenuti e delle modalità creative siano quelli eterni, fissi, che la storia ha consacrato, Pitagora, Euclide, Archimede; che una dimostrazione resta immutabile nei secoli, nei millenni; che la coerenza e il rigore siano essi stessi perenni e non soggetti a modifiche.

Ricordo ancora che, tentando di mettere in discussione tutto ciò in un mio articoletto del 1990, ebbi fior di contestazioni e dissidi: il rigore è eterno, mi si ribatteva, le modalità di creazione della matematica sono perenni, uniche ...

Ma non è così. La matematica di oggi è assai diversa, nei temi, nei modi, nel linguaggio, nelle pretese di quel cosiddetto rigore, nelle modalità di esposizione e di dimostrazione da quella anche solo di 100 anni fa, tanto per fare riferimento esattamente a quel periodo durante il quale questo tipo di discussione (peraltro sempre esistita) si faceva violenta, evidente, esasperata. Nascevano epistemologie, logiche, definizioni, strumenti matematici, convinzioni matematiche, idee che stavano scuotendo con veemenza ogni esasperata velleità fondazionale supposta unica, immutabile.

In particolare, quel che colpisce di più, è la modalità dimostrativa. Come tutti i lettori ben sanno, si sono avvicendate, nel corso dei secoli, modalità dimostrative tra loro assai diverse. E il processo segue, inarrestabile, sempre più rapido.

Se è vero, come è vero, quel che scrive l’Autore, Gabriele Lolli, che a scuola l’attività dimostrativa continua a essere insegnata come fondata, basata, asserita su principi che datano millenni e che vengono ritenuti e dunque proposti culturalmente come perenni e universali, unici, è anche vero invece che le modalità dimostrative sono varie, alcune tra loro radicalmente diverse. È certo il fatto che taluni disdegnano, disapprovano, ridicolizzano le modalità diverse dalle proprie, quelle sulle quali si è formato, ma è altrettanto vero che ci sono forme nuove, affascinanti, sorprendenti che si sono affermate, altre che sono in fase di farlo, ma che già s'avvertono.

Ecco, nelle precedenti linee ho cercato di riassumere in poche battute uno dei contenuti di questo affascinate libro, denso di notizie storiche, logiche, epistemologiche, un libro attraente che è necessario leggere e meditare, sia se si è matematici (soprattutto se si ritiene che il proprio modo di dimostrare sia "il" corretto, unico, indiscutibile), sia se si è docenti di matematica di scuola, per allargare il repertorio delle modalità di strade possibili, almeno quello personale, giungendo ad accettare con apertura mentale dimostrazioni meno formali, anche da parte degli studenti, e non solo ripetizioni apprese a memoria che hanno significato solo per un adulto.

Ma non c'è solo questo, nel libro di Lolli. Vi si parla di storia, di logica, in modo molto profondo, di assiomatiche, della contrapposizione mai abbastanza discussa e analizzata fra Hilbert e Bourbaki, di che cosa vuol dire davvero assioma, di come ci siano state nella matematica rivoluzioni sofisticate e devastanti, talvolta occorse senza che tutti se ne rendessero conto. Questo libro parla di un tema affascinante, tecnico, unico, la "bellezza della matematica", che cosa significa davvero questo sostantivo semanticamente così vario. Un capitolo tremendamente interessante è l'undicesimo, nel quale si inizia commentando il famoso testo di Eugene Wigner del 1960 dedicato alla cosiddetta "irragionevole efficacia della matematica", che tutti abbiamo letto, ma non sempre compreso in profondità. (Invito tutti coloro che si ritrovano descritti dalla precedente frase a leggere tale capitolo).

E poi… e poi! Che cosa sarà la dimostrazione in futuro? Chi ricorda quando, nel 1977, apparve la "dimostrazione" di Kenneth Appel e Wolfang Haken relativa alla congettura-teorema dei 4 colori? Ho messo "dimostrazione" fra virgolette perché in quella occasione si accese un dibattito tremendo proprio sulla modalità (da pochi ritenuta accettabile) delle dimostrazioni affidate a macchine, in grado di effettuare operazioni di stima, di comparazione e di sintesi impossibili per un essere umano. Credo che tutti noi partecipammo a quel dibattito epistemologico, forse mai sopito. Ma ora ci siamo. Non soltanto questo tipo di dimostrazioni sono accettate dai più, ma sono sempre più comuni e potenti.

Un intero scaffale della mia vasta biblioteca personale contiene solo libri di Gabriele Lolli, molti dei quali da me recensiti negli anni, alcuni dei quali riletti, tutti apprezzati; ma questo, questo è una vera e propria bomba!, ricco com'è di citazioni, di esempi, di approfondite spiegazioni. Lo suggerisco subito, appena finito di leggere, confessando che lo rivedrò daccapo nelle prossime settimane, quaderno e matita a portata di mano, per prendere preziosi appunti.

Cavalli Sforza, L. (2019). *L'evoluzione della cultura*. Torino: Codice.

Recensione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Sopraffatti dagli eventi avvenuti fra il 2019 e il 2021, questo libro ci era sfuggito; e solo nel 2022, ne veniamo a conoscenza, decidendo non solo di leggerlo (attratti come siamo dal tema del testo e dalla fama dell'autore) ma anche di recensirlo. Anche perché si tratta di un'edizione ampiamente rinnovata, rispetto a quella originale, ben nota, del 2004.

Quando si parla di "evoluzione", sempre (o, meglio, assai spesso) ci si riferisce alla biologia, alla genetica, all'antropologia; ma Cavalli Sforza pone in parallelo l'evoluzione in senso biologico con quella culturale, arrivando a dichiarare che c'è una profonda analogia, appunto, fra evoluzione in senso biologico e quella in senso culturale.

Ciò comporta delle conseguenze fantastiche, di grande impatto scientifico (com'è nel nostro caso di lettori avidi) ma anche sociale.

Fino agli ultimi anni di tutto il precedente millennio, non si possono annoverare veri e propri studi seri per capire i meccanismi dell'evoluzione culturale; il che ha fatto sì che certi fenomeni siano risultati inspiegati, per esempio perché alcuni aspetti culturali risultano stabili mentre altri sono in continuo ampliamento. La spiegazione adottata da alcuni, poco dotta, non basata su vera ricerca, è che le differenze di comportamento osservate in nazioni o in culture tra loro diverse fossero legate a differenze dovute a una risposta che chiama in causa una supposta eredità biologica. Questo modo di pensare e di dedurre ha portato al razzismo più bieco che ancora negli ignoranti domina. Secondo questo vecchio ed erroneo modo di pensare, le differenze di sviluppo economico o di successo politico o di successo militare sono causate da differenze innate, immutabili, che hanno fondamento in supposte basi biologiche della supremazia. Queste spiegazioni scientificamente infondate e sbagliate sono dovute all'ignoranza e a informazioni sommarie e superficiali.

La crescita demografica è recentissima, rispetto alla storia dell'essere umano; la tribù che, partendo dall'Africa, si è spinta nei millenni fino a colonizzare il mondo (ovviamente cambiando gli individui nel corso del tempo) non contava se non centinaia di componenti, certo non più di un migliaio. Lo sviluppo demografico vero è iniziato quando l'essere umano ha cessato di essere un puro raccoglitore o un cacciatore, e si è dedicato all'agricoltura e all'allevamento, dunque non più di 10.000 anni fa. A quel punto, le popolazioni dominanti, tali in quanto avevano avuto accesso a nuove forme più idonee e comode per soddisfare i propri bisogni primari, avendo necessità di un linguaggio sempre più complesso ed evoluto, hanno cominciato a costituire gruppi di molte migliaia di individui, con lingua condivisa sempre più ampia e significativa e aspettative comuni. Questo immenso aumento del numero di individui e le dimensioni dei diversi gruppi sociali, anche in relazione alle complessità sempre più sottili delle relazioni, hanno contribuito a creare una rigida stratificazione socioeconomica, classi, caste, strati sociali, imponendo come idea giustificatrice una supposta superiorità o inferiorità biologica.

Ma la stessa genetica che si occupa delle popolazioni in sé e delle relazioni fra loro, aveva già messo in crisi questo modo di pensare.

L'idea base del razzismo è minata alla sua origine da successivi studi scientifici seri, di carattere culturale; e gli esempi che fa il nostro Autore, in grande misura basati sulle proprie ricerche, condotte in varie regioni del mondo, sono significative, molto attraenti, sottili ma anche evidenti, dato che sono condotte con perfetto rigore.

Gran parte del testo è dedicata allo studio scientifico dei fenomeni culturali; siamo di fronte a un trattato davvero profondo nel quale si formulano ipotesi basate su prove inconfutabili, relative al problema di comprendere e spiegare i fenomeni culturali e la loro evoluzione. Piacevolissimo e preciso il continuo riferimento a teorie scientifiche universalmente riconosciute come tali, per spiegare i fenomeni evolutivi della cultura.

Abbiamo imparato tante cose, spesso sorprendenti, leggendo con avidità crescente questo libro. Per esempio che 60.000 anni fa l'intera popolazione umana mondiale non raggiungeva i 60.000 individui; che l'espansione cosiddetta *out of Africa* è iniziata solo 60.000 anni fa; che Eurasia prima e Americhe poi sono state esplorate, percorse e "conquistate" da queste popolazioni originarie alla velocità di circa mezzo chilometro l'anno; che in medio oriente l'espansione è iniziata solo 11.000 anni fa, nel sud est asiatico e in Messico solo 9.000 anni fa; interessante la vicenda umana nella regione del Sahara, dato che la desertificazione attuale, iniziata fra 5.000 e 4.000 anni fa, ha respinto i suoi abitanti (coltivatori e allevatori) verso il sud comportando deforestazione di immense regioni per farne uso agricolo e pastorale.

Affascinanti sono le narrazioni dell'Autore a proposito delle sue ricerche scientifiche empiriche personali; fra tutte spicca quella con i pigmei africani, soprattutto per le sorprendenti relazioni fra convinzioni appartenenti a questo gruppo sociale e quelli circostanti; il paragone iniziale fra evoluzione biologica e culturale è chiarissimo e inatteso. Interessantissimi i racconti relativi alla trasmissione delle esperienze vincenti (per esempio mediche) da una società all'altra, nonostante forti differenze di carattere sociale. Uno dei temi di questo libro riguarda che cosa significa trasmissione culturale, formazione di convinzioni e modelli, l'idea di famiglia, monogamia e poligamia, sessualità, religione, resistenza nel tempo di nicchie sociali e culturali, come classificare o riconoscere elementi e significati terminologici quali altruismo, curiosità, valutazione della criminalità.

Risulta peraltro da questo studio che i cambiamenti culturali sono determinati dalle nostre scelte e dalle nostre decisioni; ma essi comportano cambiamenti demografici e hanno addirittura conseguenze nella selezione naturale; c'è dunque una forte relazione fra selezione naturale e scelte, sociali e personali.

Genetica e cultura sono strettamente legate, connesse, non sono la prima imperscrutabile e non modificabile e la seconda espressione di intelligenza o sensibilità; razionalità o irrazionalità, credenza nelle scienze o nell'immanenza spirituale (religiosa o credenza pseudoscientifica) non sono casuali o legate al livello sociale, sono parti ibride dello stesso complesso processo.

Fantasia, immaginazione, razionalità, dunque cosiddette arti e cosiddette scienze, sono i risultati della selezione culturale, legata a quella genetica, allo scambio, alla relazione fra gruppi umani.

Incantevole e sorprendente il paragrafo finale, dedicato al tema della felicità, relativamente raro e sporadico nelle trattazioni scientifiche. La indubitabile maggior comodità della vita attuale rispetto a quella anche solo del recente passato sembra comportare un aumento di felicità dell'essere umano; ma: intanto noi, che viviamo questo modello condiviso del mondo (anche se non tutti condividiamo le stesse idee e le stesse valutazioni) non è detto che siamo in assoluto più felici dei nostri nonni, proprio perché le comodità-conquiste negli ultimi anni sono facilmente e rapidamente diventate ovvie pretese; e poi perché tendiamo a dimenticare che vi sono gruppi sociali a volte vastissimi dei quali ignoriamo necessità, idee, bisogni, esseri umani che hanno modelli sociali del tutto diversi dai nostri.

Quel che ci ha colpito di più di questo lavoro è non solo la quantità straordinaria di informazioni che ne abbiamo tratto e delle quali stiamo facendo tesoro, per riflessioni profonde, ma la logica ferrea spietata della sua forza esplicativa. Tipica dello scienziato che narra.

D’Amore, B. (2021). *Memorie di una vita: i personaggi, le storie, le idee*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Miglena Asenova, Maura Iori e George Santi

Un libro di memorie ha di per sé qualcosa di malinconico, narra avvenimenti passati che l’autore ha deliberatamente collocato nelle terre dei ricordi, più o meno lontani, intensi, importanti; irrimediabilmente conclusi, ma impressi nel cuore, rivissuti nel presente e proiettati nel futuro. Ma quando il lettore curioso apre questo libro e inizia a leggere … viene catapultato nel centro di una narrazione gioiosa, vivace, appassionata, intensa e avvincente, i cui personaggi hanno fatto la storia della didattica della matematica a partire dai suoi più lontani esordi. Strada facendo si incontrano Efraim Fischbein, Gerard Vergnaud, Hermann Maier, Georges Papy, Zoltan Dienes, Guy Brousseau, Ubiratan D’Ambrosio, Athana(s)sios Gagatsis, Luis Rico, Juan Godino, Vicenç Font, Salvador Llinares, Ricardo Cantoral, Carlos Vasco, Luis Carlos Arboleda, Raymond Duval, Luis Radford, solo per elencare alcuni dei personaggi che per la maggior parte dei giovani ricercatori sono figure quasi leggendarie, ma che per il nostro autore sono invece “esseri umani tangibili, veri, reali, compagni di formidabili avventure intellettuali, talvolta intensi avversari tematici, talaltra fantastici alleati dialettici”. E quindi la narrazione delle memorie personali si trasforma nella narrazione della storia di una disciplina, dalla sua nascita ai giorni più recenti, attraverso un intreccio affascinante di ritratti di persone, narrazioni di eventi, riflessioni personali e metariflessioni illuminanti. Così più che sentirsi lettore di un libro di memorie o spettatore di una conferenza dotta, ci si sente un commensale a una tavola conviviale, dove il maestro condivide episodi ed eventi vissuti in prima persona con i suoi allievi, conducendoli in una navigazione che tocca molte terre, sulle quali egli ha lasciato le sue impronte indelebili: prima di tutte, quella della didattica della matematica, ma accanto a essa anche terre meno frequentate da parte degli studiosi di questa disciplina, almeno non in veste di esperti: l’arte figurativa, la narrativa, lo sport agonistico e naturalmente la matematica, compresa la sua storia e la sua divulgazione. Quelle “terre straniere” si trasformano quindi in universi paralleli in cui il protagonista incontra guide d’eccezione che lo conducono e accompagnano alla scoperta di mondi all’apparenza privi di contatto tra loro, ma che sono tutti intimamente connessi nella narrazione di queste memorie, tutti necessari per ricostruire la poliedrica personalità e la ricchezza della vita personale e professionale del nostro autore.

In una narrazione in cui le trame sono fortemente intrecciate il percorso non è mai lineare, ma se proprio volessimo introdurre il lettore nel contesto iniziale della narrazione, dovremmo trasportarci indietro nel tempo fino agli inizi degli anni ’70 del secolo scorso: il nostro protagonista si è laureato da poco in matematica e si accinge a diventare “matematico di professione”, accedendo all’incarico di assistente presso l’Istituto di Geometria dell’Università di Bologna. Nonostante la grande passione per le ricerche puramente matematiche e l’impegno dedicato alle pubblicazioni in questo ambito, alcuni incontri con coloro che all’epoca si occupavano dell’insegnamento della matematica in Italia (tra gli altri, Emma Castelnuovo, Mario Ferrari, Liliana Chini Artusi, Rosa Rinaldi Carini, Mario Barra, Ferdinando Arzarello, Paolo Boero, Fulvia Furinghetti) e fuori dall’Italia (Georges e Fréderique Papy in Belgio, Zoltan Paul Dienes in Ungheria) lasciano il segno e inducono il nostro protagonista a rivolgere la mente sempre più spesso alle problematiche dell’insegnamento e dell’apprendimento. Ma sono ancora gli anni della New Math, dell’insiemistica alla scuola primaria, della produzione di libri di testo come contributo considerato determinante in questo senso; è un’epoca in cui la didattica della matematica come disciplina non esiste ancora, ma in cui alcuni matematici, sensibili alle problematiche aventi strettamente a che fare con l’insegnamento, conducono riflessioni e avanzano proposte su questo tema.

Seguono poi gli anni in cui si intensifica l’attività di formazione per gli insegnanti, si conducono le prime prove sperimentali in aula, un periodo che per il nostro protagonista culmina con un convegno organizzato dall’UMI nel 1980 a Cognola di Trento, al quale egli è invitato, accanto ad altri studiosi militanti in questo settore, e al quale sono invitati anche i più famosi studiosi stranieri di problematiche didattiche relative all’insegnamento della matematica dell’epoca: Zoltan Dienes, Georges Papy, Fréderique Papy, Zofia Krygowska ed Efraim Fischbein.

L’incontro con Fischbein, che diventa il primo mentore di didattica della matematica per il nostro giovane protagonista, è fondamentale: si tratta di un incontro che segna una svolta epocale, fa intravedere la possibilità di una teoria scientifica nell’ambito dell’apprendimento della geometria, che inizia ad andare ben oltre la semplice euristica, come lascia intendere la teoria dei concetti figurali. A quell’epoca, per l’autore, il passaggio dalla matematica alla matematica per la scuola è quasi definitivo.

Gli anni ’80 sono poi segnati dall’incontro fondamentale, dirompente, fulminante, cruciale, decisivo con Guy Brousseau, amico e collega carissimo, e la sua teoria delle situazioni didattiche, che segna la nascita della didattica della matematica come disciplina scientifica. Seguono poi tre eventi che segneranno ulteriormente e profondamente tutta la vita scientifica e personale del nostro autore: la fondazione, nel 1984, del Nucleo di Ricerca Didattica (NRD) presso l’Università di Bologna, uno dei primi nuclei fondati in Italia, intorno al quale si costituì un gruppo di ricerca e divulgazione, di cui fecero (e fanno) parte molti insegnanti ricercatori; la fondazione, nel 1986, del

Convegno "nazionale" *Incontri con la Matematica*, del quale la prima edizione, la numero 0, si tenne a Bologna, mentre le successive, dalla numero 1 in poi a Castel San Pietro Terme, tuttora il più grande convegno "nazionale" in didattica della matematica, che ha visto la partecipazione dei maggiori esponenti della ricerca nel campo a livello internazionale; la fondazione, nel 1987, della rivista *La matematica e la sua didattica*, una rivista internazionale di ricerca tuttora attiva.

Il lavoro e l'amicizia con Francesco Speranza, gli incontri, durante il Convegno n. 6 a Castel San Pietro Terme, con Efraim Fischbein e Gerard Vergnaud in contemporanea, la profonda passione per la divulgazione e la storia della matematica, per l'arte figurativa, oltre che per la didattica della matematica, gli incontri con Raymond Duval e la sua teoria dei registri di rappresentazione semiotica, una "vera bomba culturale", sono altre pietre miliari nella storia narrata dal protagonista di queste intense memorie.

Un libro di memorie ricco di dettagli curiosi e unici, di riflessioni profonde e argomentate, di citazioni preziose e stimolanti, di storie e di esperienze personali che si intrecciano nel tempo; un libro coinvolgente, scorrevole e avvincente nella narrazione che cattura e appassiona il lettore fino alle ultime pagine, più personali e intime.

Lo consigliamo vivamente a tutti coloro che desiderano conoscere più in profondità non solo la didattica della matematica e molti illustri personaggi, di altissimo spessore umano e culturale, che hanno contribuito a creare l'attuale didattica della matematica, ma anche il Nostro, le sue straordinarie qualità umane e professionali, il suo illuminante percorso di formazione accademica e personale, la sua appassionata dedizione alla ricerca, alla divulgazione della matematica, alla formazione di allievi e insegnanti, la sua ricchissima produzione scientifica, i suoi grandi interessi in ogni campo della cultura, le sue peripezie esplorative e avventure intellettuali, dalle quali emerge con forza anche il modo in cui il Nostro vede la didattica della matematica: una "matematica applicata, applicata all'apprendimento", dunque una disciplina matematica.

Un libro molto atteso, non solo dai suoi più affezionati (ex) allievi di dottorato che si sono lasciati trasportare nel corso degli anni dalle sue affascinanti storie di vita, di esperienze e di ricerca vissute in prima persona con illustri personaggi che per molti, non solo (ex) allievi, sono prestigiose, qualificate, autorevoli, ricorrenti citazioni, riconosciute a livello internazionale.

Impossibile non leggere tutto d'un fiato questo prezioso libro e attingere alla sua ricchissima bibliografia generale per ulteriori approfondimenti, studi e ricerche.

Iori, M. (2021). La dimensione semio-cognitiva nell'apprendimento della matematica. Bologna: Pitagora.

Prefazione di Raymond Duval

La formazione degli insegnanti è il problema principale nell'insegnamento della matematica. E questo problema è particolarmente cruciale per gli studenti fino a 16 anni ma anche oltre. A questo proposito, dobbiamo prendere in considerazione tre punti di vista fondamentali. Prima di tutto, quello dei requisiti matematici, ovviamente. Ma anche quello dei giovanissimi studenti ancora in pieno sviluppo intellettuale, che devono anzitutto acquisire personalmente la propria autonomia intellettuale! Infine, quella degli insegnanti nelle loro classi. Gli insegnanti devono essere in grado di passare dal punto di vista matematico al punto di vista degli studenti, per guidarli e adattarsi ai diversi ritmi di progresso e alle diverse esigenze. La complessità di questo problema deriva dal fatto che le "teorie", sia dal punto di vista dei processi di apprendimento e di comprensione dei giovani studenti, sia dal punto di vista della gestione del lavoro in aula da parte degli insegnanti, si moltiplicano e si rinforzano tra loro. Tutto questo, per non parlare dei gruppi di esperti che definiscono gli obiettivi di acquisizione a livello di cicli e le progressioni nei contenuti in relazione alla successione degli anni scolastici.

Indipendentemente da qualsiasi insegnamento, c'è il fatto che la matematica ha uno status "epistemologico" specifico, rispetto alle altre discipline scientifiche. Ora, l'uso relativamente recente del termine "epistemologia" si è rapidamente dimostrato ambiguo, poiché designa allo stesso tempo un'epistemologia intra-matematica e un'epistemologia comparativa. La prima è interamente incentrata sull'emergenza dei concetti matematici e strettamente legata alla storia della matematica. La seconda, fondata da Kant, mette a confronto i diversi modi di accedere agli oggetti di conoscenza in matematica e nelle altre discipline scientifiche. È ovviamente questa che è essenziale per un'educazione di base comune che dovrebbe essere indirizzata a tutti gli studenti. Ed è interessante notare che è l'epistemologia comparativa che si è imposta in molte ricerche sull'insegnamento in primaria e secondaria, con il ricorso ai lavori di Peirce e la crescente importanza data alla semiotica.

Tra tutte le "teorie" semiotiche, l'analisi semio-cognitiva delle attività matematiche si concentra specificamente sulle operazioni specifiche di ciascuno dei diversi registri semiotici che vengono mobilitati per "fare (un po' di) matematica" e sulla *loro necessaria coordinazione cognitiva*. Perché è solo quando inizia questa coordinazione cognitiva che possiamo capire la matematica e accedere agli "oggetti matematici". Ma gli oggetti matematici non hanno nulla in comune con i fenomeni fisici, e ancor meno con le situazioni "concrete" della vita quotidiana. E, contrariamente a quanto spesso si lascia credere, le rappresentazioni iconiche che vengono proposte nei documenti didattici non consentono di visualizzarle. L'obiettivo dell'analisi semio-cognitiva delle attività matematiche è la *assunzione di consapevolezza* da parte degli studenti del funzionamento semio-cognitivo specifico della matematica. Ma questo richiede che *gli insegnanti stessi ne diventino consapevoli*. Altrimenti, si scontreranno contro il muro che ferma i loro studenti, e rimarranno bloccati e scoraggiati ai piedi del muro dell'incomprensione dei loro studenti.

La ricerca presentata in questa tesi è interamente dedicata alla "consapevolezza" che gli insegnanti hanno, o non hanno, del funzionamento semio-cognitivo specifico della matematica. Essa si basa su uno spettro molto ampio di rappresentazioni semiotiche di contenuti matematici di base (2.4 e 2.5, pp. 76–88). Perché è a queste rappresentazioni che i giovani studenti si trovano di fronte nell'apprendimento della matematica. Ma, soprattutto, queste rappresentazioni sono poste in relazione a uno dei quattro registri nei quali esse sono prodotte, al fine di evidenziare il modo di "fare" matematica: convertire le rappresentazioni semiotiche da un registro a un altro, il che implica un coordinamento cognitivo tra i due registri mobilitati (2.6, pp. 88–95). Per condurre questa ricerca è stato elaborato un questionario in funzione delle operazioni semio-cognitive da eseguire e alle coordinazioni cognitive pre-requisite (necessarie). Esso dunque non comporta alcuna questione che richieda l'uso esplicito di conoscenze matematiche già insegnate. Si attiene al solo punto di vista del funzionamento cognitivo implicitamente richiesto per qualsiasi attività matematica ("*la dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica*"), (3.8.3, pp. 140–165). E, ultima scelta logica ma rischiosa, tutti gli elementi del questionario sono formulati utilizzando i termini della "teoria" semio-cognitiva dei registri di rappresentazione semiotica! Naturalmente, tutti gli insegnanti che hanno accettato di partecipare a questa ricerca operavano nella scuola primaria, nella scuola secondaria di I grado o nei primi anni di scuola secondaria di II grado.

La ricerca presentata in questa tesi, che è stata sostenuta nel 2015, è un'impresa ambiziosa per l'ampiezza del campo che vuole esaminare. E, data la complessità del problema della formazione degli insegnanti per l'educazione matematica, l'obiettivo evidenziato in questa ricerca non poteva essere raggiunto così direttamente. E questo per due motivi. Il primo deriva dal fatto che il funzionamento semio-cognitivo alla base di qualsiasi attività matematica evidenzia una presa di coscienza e che volerla comunicare o appropriarsene come qualsiasi altro tipo di conoscenza risulta inefficace. Questa presa di coscienza richiede compiti specifici che la preparino e può essere raggiunta solo nel tempo, sulla scala di un anno scolastico e in interazione con il lavoro individuale degli studenti su questi compiti specifici. È anche d'altra parte interessante notare che l'analisi dei risultati va in questa direzione (4.3.1, 4.3.2 e 4.3.5, pp. 176–200 e pp. 208–219). La seconda ragione deriva dal fatto che i trattamenti, cioè le sostituzioni di rappresentazioni semiotiche da effettuare nello stesso registro, sono tanto fondamentali quanto le conversioni. Perché di fronte a un problema o a un'attività matematica, sono i trattamenti da *effettuare matematicamente* che determinano la scelta delle conversioni, vale a dire i cambiamenti di registro da effettuare. E qui, la consapevolezza delle possibilità di trattamento che un registro offre, e che gli altri registri non permettono di fare, è essenziale quanto quella delle conversioni.

Le difficoltà e, soprattutto, le resistenze suscitate dalla necessità di una presa di coscienza del funzionamento cognitivo richiesto per la comprensione in matematica, derivano dal fatto che *qualsiasi attività matematica ha sempre due volti*. Il volto esposto è quello degli "oggetti", delle proprietà, dei teoremi, delle operazioni, degli algoritmi che si impostano istituzionalmente come obiettivi di "acquisizione" per ciascuno dei cicli di insegnamento. Tale volto *utilizza necessariamente delle rappresentazioni semiotiche*. Il volto nascosto è, al contrario, quello della coordinazione cognitiva dei quattro tipi di registri di rappresentazione semiotica. È questo coordinamento che consente di comprendere ed eseguire le conversioni e i trattamenti necessari per essere in grado di risolvere *matematicamente* i problemi. Tuttavia, i processi cognitivi non sono affatto gli stessi su ciascuno di questi volti. I processi cognitivi del volto nascosto sono processi di riconoscimento che vengono eseguiti in meno di un secondo, indipendentemente dai contesti o dalle situazioni. Così, per esempio, la conversione non si dà tra una rappresentazione che viene data all'inizio e un'altra rappresentazione nel registro di arrivo, ma tra qualsiasi rappresentazione che si sceglie all'inizio e una moltitudine di altre possibili rappresentazioni in un altro registro. E questo in entrambe le direzioni di una conversione, IL RICONOSCIMENTO *deve essere fatto in meno di trenta secondi al massimo*! Questo è il primo criterio dell'autonomia intellettuale di uno studente per "acquisire" CONOSCENZE matematiche e utilizzarle spontaneamente, anche al di fuori della matematica.

La classificazione delle rappresentazioni semiotiche in diversi tipi di registri e la distinzione delle operazioni semio-cognitive di conversione e di trattamento non è una "teoria", ma uno strumento di analisi, una metodologia e un programma di ricerca. Pertanto, diverse aree devono ancora essere esplorate. In primo luogo, ci sono aspetti che hanno a che fare con la consapevolezza del funzionamento semio-cognitivo delle scritture simboliche e la gamma delle operazioni discorsive nella designazione degli oggetti. E dunque la loro presa di coscienza da parte degli studenti e degli insegnanti è cognitivamente e didatticamente decisiva per l'introduzione dell'algebra elementare. Nel questionario elaborato per gli insegnanti, la grande maggioranza delle domande riguarda la visualizzazione geometrica o grafica e le domande concernenti le scritture simboliche sono limitate alla scrittura frazionaria (3.8.3, pp. 140–165). Tuttavia, il contributo della ricerca presentata è duplice. Essa evidenzia i limiti di ogni questionario per rendere gli insegnanti consapevoli dei processi cognitivi del volto nascosto delle attività matematiche, o anche solo per valutarlo. Ma mostra anche la necessità di una formazione degli insegnanti specificamente focalizzata su tali processi cognitivi. Indipendentemente dal questionario e dai suoi risultati, questa tesi offre un dossier molto ben documentato sulle “teorie” che privilegiano alcuni tipi di rappresentazioni nell’amplissimo spettro delle possibili rappresentazioni semiotiche (2.1 e 2.2, pp. 25–65). E ne offre una presentazione sistematica e rigorosa, che risulta essere preziosa da consultare.

La consapevolezza del funzionamento semio-cognitivo specifico del pensiero e delle attività matematiche sta diventando più urgente che mai. Ciò è dovuto alle sfide che tutti i sistemi educativi devono affrontare. Ci sono le crescenti differenze tra tutti gli studenti, sia in relazione al loro ambiente sia ai loro precedenti percorsi scolastici. Esse richiedono sia un adattamento alla “eterogeneità” degli studenti sia un aumento delle tipologie dei supporti personalizzati. C’è poi da considerare la messa in discussione della coppia (insegnante, classe) come principio stesso di un’organizzazione comune e uniforme del lavoro per un gruppo annuale di 20-30 studenti. E c’è, infine, la crescente sproporzione tra ciò che può essere appreso a scuola e ciò che dovrà essere appreso nella vita professionale. Si tratta di una sfida sia dal punto di vista istituzionale che dal punto di vista di docenti e studenti. Senza una tale consapevolezza, gli insegnanti si troveranno molto rapidamente in contrasto con le richieste degli studenti.

E le ricerche didattiche come entrano in tutto questo? Ricerche che non mescolino i punti di vista fondamentali da prendere in considerazione nella formazione degli insegnanti *dovrebbero essere intraprese per ciascuna delle teorie* riguardanti i processi di apprendimento e di comprensione della matematica da parte dei giovani studenti, e più in particolare per le teorie che si riferiscono alle “rappresentazioni” e alla “semiotica”. Perché non c’è e non può esserci un’educazione matematica che non sviluppi l’autonomia intellettuale di ogni studente.

Asenova, M. (2021*). Definizione categoriale di Oggetto matematico in Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Prefazione di Ferdinando Arzarello

Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une "continuité" essentielle – ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un dépaysement soudain.
(A. Grothendieck, La topologie ou l'arpentage des brumes)

Ogni insegnante di matematica ha davanti a sé il problema di come fare apprendere efficacemente ai propri allievi le conoscenze matematiche previste nel loro piano di studi: da un lato, possiede le conoscenze e i metodi matematici che deve insegnare (per esempio l'Aritmetica) nelle versioni per così dire dotte, che si trovano nei sacri testi della disciplina (la scuola didattica francese parla di 'sapere sapiente'), dall'altro ha presenti teorie e strumenti didattici opportuni (per esempio le teorie costruttiviste dell'apprendimento, i vecchi regoli di G. Cuisenaire o il recente TouchCounts di N. Sinclair) per la trasposizione didattica di tali conoscenze e metodi (il 'sapere da insegnare'). In questo senso, ogni insegnante ha davanti a sé due tipi di 'oggetti': quelli matematici e quelli specifici della didattica della matematica. I due devono certamente parlarsi, ma come questo si possa realizzare non è certo impresa facile: di fatto si tratta di un problema ancora aperto, cui le varie scuole di ricerca in didattica della matematica hanno dato soluzioni diverse e spesso parziali. Questo accade in realtà anche per gli oggetti matematici del sapere sapiente, ma dal versante del sapere insegnato il problema è molto più serio. Infatti, da un lato la questione ontologica degli oggetti della matematica (il *che cosa*?) è risolta in vari modi da chi si occupa di fondamenti della disciplina nell'ambito di precise istanze epistemologiche (il *come*?); dall'altro chi lavora alla definizione ontologica degli oggetti propri della didattica della matematica è particolarmente attento ad aspetti di natura etica, come il valore sociale, culturale e politico della formazione matematica (il *perché*?), mentre gli aspetti epistemologici non sono sempre così presenti. La dimensione più strettamente matematica rischia perciò di essere trascurata o assente, il che può rappresentare un ostacolo serio per definire gli oggetti della didattica della matematica in modo ontologicamente soddisfacente. Questo problema è bene messo in luce da M.A., che scrive:

> Il legame dei suoi [della didattica della matematica, N.d.A.] oggetti di studio con quelli corrispondenti della matematica non ha finora ricevuto la dovuta attenzione nelle ricerche e dunque nemmeno è stata mai affrontata la problematica di una definizione generale di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. (p. 9)

L'autrice invece ritiene che è proprio dall'attività matematica che si possono derivare un'ontologia e una epistemologia per la didattica della matematica, e non viceversa. È questa dimensione, anche pragmatica, che deve condurre a una definizione di 'Oggetto Matematico Specifico della Didattica della Matematica' (OMSDM). Ed è precisamente di questa definizione concreta, che ha un carattere ontologico, epistemologico e pragmatico, e della sua giustificazione che tratta la sua tesi.

Per questo M.A. elabora in primo luogo dei criteri cui deve soddisfare una tale definizione e, visto che non trova alcun costrutto tra quelli correnti in filosofia della matematica che siano in grado di soddisfarli, ricorre alla filosofia sintetica della matematica contemporanea di Fernando Zalamea, matematico e studioso dei fondamenti dell'Università di Bogotà, che a sua volta si ispira alle riflessioni fondazionali del grande matematico Alexander Grothendieck (1928–2014), che lui definisce 'maestro universale della matematica' e il cui pensiero troviamo anche nel lavoro di M.A. Nelle sue opere F.Z. propone una svolta verso una comprensione sintetica (come antonimo di analitica) della matematica più recente, che si basa ampiamente sulla teoria matematica delle categorie (di qui il suo debito a Grothendieck, uno dei padri di questa teoria). È questa interpretazione categoriale che gli permette di evidenziare importanti tensioni dialettiche e dinamiche nell'attività matematica, che tendono ad essere oscurate, e talvolta del tutto cancellate, dalla consueta comprensione analitica e formale, tipica della filosofia della matematica più tradizionale, da cui traggono ispirazione quasi tutti gli studi sui fondamenti della matematica da G. Frege (1848–1925) in poi. Egli prospetta così una visione dell'evoluzione del pensiero matematico attraverso un processo di crescita a spirale, che rompe le consuete prospettive riduttive e lineari in cui la comprensione matematica viene intesa in modo iterativo.

È proprio questa visione dialettica e dinamica della matematica prospettata da F.Z. che spinge M.A. a tracciare nella sua tesi un cammino nuovo verso una definizione di OMSDM in grado di soddisfare ad alcuni criteri, individuati come necessari; questi (p. 307) richiedono che la definizione:

(1) sia compatibile con una visione statica, ma anche con una visione dinamica di teoria in didattica della matematica;
(2) tenga conto del rapporto tra gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come disciplina e gli oggetti matematici della matematica come disciplina, nella loro versione formale;
(3) tenga conto degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali matematici;
(4) sia sufficientemente generale da poter astrarre dall'approccio epistemologico nelle diverse teorie in didattica della matematica;
(5) sia in grado di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica.

È questo un compito davvero arduo, che non spaventa certo la nostra studiosa, che non esita ad affrontare il problema in modo aperto e innovativo rispetto alle soluzioni più tradizionali, nessuna delle quali permette, per un motivo o per l'altro, di soddisfare pienamente a tutti questi criteri. Con pazienza e sagacia degne di Ulisse, intraprende un viaggio attraverso le principali definizioni di oggetto matematico avanzate dal 1991 ad oggi dai più prestigiosi ricercatori in didattica della matematica, da Y. Chevallard ad A. Sfard (cap. 8), e le confronta tra di loro rispetto ai criteri individuati. Il viaggio tocca sette mete e il resoconto dei dati raccolti è riassunto nella Tabella 6 (p. 242) e nel diagramma della Figura 29 (p. 245), entrambi ampiamente commentati. Essi mostrano che nessuna delle definizioni esaminate soddisfa tutti i criteri utili ai fini di una definizione appropriata di OMSDM. M.A. scopre inoltre una caratteristica che contraddistingue tutte le definizioni esaminate, cioè il fatto che esse sono formulate come definizioni generali di oggetto matematico *tout court*, valide indipendentemente dal fatto che si prenda in considerazione la matematica o la didattica della matematica come riferimento. Di per contro, tutte le definizioni considerate presentano alcune caratteristiche comuni condivise: la natura epistemica, la dinamicità e una posizione pragmatica nei confronti del loro significato; inoltre gli aspetti semiotici sono presenti in sei definizioni su sette.

A questo punto, vista la risposta non specifica rispetto alla natura degli OMSDM che ha trovato nelle definizioni correnti in didattica della matematica, la nostra ricercatrice decide di verificare se e in quale misura le caratteristiche degli oggetti matematici che si evincono dalle definizioni date in didattica della matematica trovano una qualche corrispondenza nelle definizioni di oggetto matematico che si incontrano nella matematica come disciplina. Perciò intraprende un secondo viaggio tra le molte proposte date in merito dalle diverse scuole fondazionali della matematica a partire da quelle nate a cavallo tra Ottocento e Novecento giù giù fino ai nostri giorni. Il viaggio è oggetto del Cap. 9 e tocca 12 mete di vario tipo: esso si conclude con l'osservazione che gli oggetti matematici descritti in filosofia della matematica presentano caratteristiche molto diverse tra loro e solo alcuni di essi possono essere considerati compatibili con le definizioni di oggetto matematico incontrate nel primo viaggio. Di fatto le definizioni di oggetto matematico fornite in didattica della matematica fanno riferimento a una tipologia di oggetto matematico che non esiste come tale in filosofia della matematica, ma che ha molti tratti in comune con un ipotetico oggetto di studio della *filosofia della pratica matematica*.

Il sugo dei due viaggi porta la nostra viaggiatrice indefessa ad approdare infine alla seguente domanda: a quale tipo di filosofia della pratica matematica fare riferimento ai fini di ottenere

> una risposta adeguata alle esigenze ontologiche comuni a tutte le definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica, di tenere conto della dinamicità

> degli oggetti matematici, del carattere pragmatico del loro significato, della loro dimensione epistemica, senza trascurare quella semiotica? (p. 305)

In un certo senso, Ulisse si trasforma in Kant, che si chiede nei suoi Prolegomeni come sia possibile una scienza pura della natura; analogamente qui si tratta di definire una scienza ‘pura’ che riguardi gli OMSDM. Scrive infatti M.A.:

> [Rispondere a questa domanda] consentirebbe di inquadrare gli oggetti matematici dal punto di vista della filosofia della matematica in maniera tale che la loro definizione si accordi con le esigenze di una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. (p. 305)

Definiti così i criteri in modo per lei soddisfacente (p. 308), M. A. può finalmente dedicarsi alla ricerca di una definizione precisa di OMSDM. Dapprima intraprende la costruzione di un quadro teorico che sia coerente con tali criteri (seconda parte della tesi: capp. 10 e 11); segue la definizione di OMSDM (terza parte, cap. 12), coerente conseguenza del quadro teorico precedentemente preparato.

La seconda parte costituisce il cuore della ricerca mentre nella terza parte se ne raccolgono i frutti. Il punto di partenza è l’individuazione di una specifica filosofia della pratica matematica vera e propria, da interpretare nell’ambito della didattica della matematica attraverso una integrazione con elementi propri di quest’ultima, di carattere gnoseologico, semiotico ed ermeneutico, relativi agli oggetti propri della didattica della matematica. Essa è anche la sua parte più complessa e irta di difficoltà di lettura, soprattutto per chi non abbia una qualche conoscenza della teoria delle categorie. Infatti il modo nuovo di guardare agli oggetti matematici della teoria delle categorie è proprio la ‘svolta ontologica’ che permette la definizione di un quadro teorico che soddisfi ai criteri individuati nella prima parte e la conseguente definizione di OMSDM. Qui F. Zalamea, con la sua filosofia sintetica, e A. Grothendieck, con la sua nozione di fascio e poi di topos, unificante e chiarificatrice in matematica[1] vengono in aiuto a M.A., che osserva:

> Zalamea fa risalire questo cambio di prospettiva ontologica al lavoro di Grothendieck, che in matematica ha avuto un effetto simile a quello che ebbe la nascita della teoria della relatività in fisica; infatti, è a Grothendieck che Zalamea attribuisce la ‘svolta einsteiniana’ […] in matematica. Tale svolta consiste nel mettere al centro dell’attenzione il movimento, il transito degli oggetti, come nella teoria della relatività viene messo al centro il movimento degli osservatori;

[1] Grothendieck (Recoltes et Semailles, Manoscritto inedito, p. 52; reperibile online: https://jmrlivres.files.wordpress.com/2009/11/recoltes-et-semailles.pdf) usa la metafora dell’arpentage des brumes (mappare le nebbie) per indicare il ruolo dei fasci nell’unificare le diverse geometrie, così come nello sposare i numeri con le grandezze (épousailles du nombre et de la grandeur).

> ciò che in tale ‘matematica relativa’ […] diventa centrale, è l’individuazione di invarianti appropriati che ‘si celano’ dietro ai transiti. (p. 332)

È questa l’idea chiave che ispira tutto il lavoro della tesi: una definizione categoriale degli OMSDM ne cattura coerentemente tutti gli aspetti richiesti dai criteri definiti nella prima parte, tra i quali quello della dinamicità ha un ruolo fondamentale.

L’autrice è ben consapevole delle difficoltà che questi argomenti presentano, soprattutto in quanto richiedono di guardare agli oggetti matematici in modo nuovo e rivoluzionario rispetto alla tradizionale concezione insiemistica cui si è abituati. M.A. si trasforma allora in una guida insuperabile e, novello Virgilio (quante vesti indossa nel suo lavoro!), accompagna il lettore con un testo in cui le inevitabili difficoltà sono spezzettate e presentate con il continuo ricorso a interpretazioni intuitive, ma non per questo meno rigorose, e all’uso di utilissimi diagrammi, che sfruttano opportunamente in questo senso il linguaggio delle categorie come scienza dei diagrammi per chiarire i vari concetti introdotti. In questo il lavoro riprende importanti idee di C.S. Peirce sul ragionamento diagrammatico, di cui negli ultimi anni si è riappropriata la didattica della matematica. Questo aspetto ci consente di introdurre degli elementi di ragionamento diagrammatico all’interno della didattica della matematica come disciplina, il che può avere dei vantaggi teorici importanti, a causa della “osservabilità” diagrammatica delle relazioni coinvolte.

Nell’economia della tesi, il linguaggio categoriale, in quanto diagrammatico, è un metalinguaggio, che descrive e spiega il diagramma, ma tale descrizione/spiegazione non può sostituire il diagramma. Questo aspetto è spiegato nella tesi con una bella analogia, in cui M.A. ricorre al celebre problema dei ponti di Königsberg e alla soluzione che ne diede L. Euler (p. 400 e ss.). Le figure in quelle pagine illustrano sia la città come rappresentata in una mappa del 1652 (Fig. 39) sia il grafo astratto elaborato da Euler nel 1736 (probabilmente a partire da una qualche mappa analoga) per risolvere il problema. Esso segna la nascita dell’odierna teoria dei grafi, della quale Euler enunciò le prime definizioni e teoremi. Ora,

> il teorema dimostrato da Euler non parla di ponti, aree della città e di numero di ponti che si affacciano su esse, ma di oggetti astratti (nodi, archi e gradi di nodi) e per essere considerato una soluzione del problema dei ponti di Königsberg deve essere interpretato nel contesto; [si può dire, da un lato, che modellizza il problema in forma generale ed astratta, e dall’altro] per essere considerato una soluzione del problema dei ponti di Königsberg deve essere interpretato nel contesto. (p. 449)

Ebbene, gli

> strumenti categoriali [sono usati nella tesi] nello stesso modo in cui oggi si usano gli strumenti appartenenti alla teoria dei grafi per modellizzare dei fenomeni

> complessi reali, con l'obiettivo di rendere evidenti le relazioni generali tra gli elementi coinvolti. (p. 403)

e inoltre la trattazione che se ne fa "necessita di un'interpretazione nel linguaggio della didattica della matematica con la sua terminologia e le sue relazioni specifiche" (p. 404). La teoria delle categorie risulta perciò, per usare il linguaggio di Grothendieck, una mappatura astratta adatta a descrivere gli OMSDM. Il capitolo 11 accompagna il lettore passo passo nella costruzione di questa mappatura: essa

> consiste nella messa in corrispondenza di elementi del linguaggio astratto categoriale, che sono via via introdotti, con elementi del linguaggio della didattica della matematica come disciplina. In questo modo le relazioni che valgono in teoria delle categorie potranno ottenere un'interpretazione (o modellizzazione) nell'ambito della didattica della matematica. (p. 400)

Ad ogni passo (ce ne sono ben 11 nel capitolo) l'introduzione dei concetti categoriali è seguita dalla sua interpretazione/modellizzazione, con esempi presi dal contesto della didattica della matematica. Ad esempio, si mostra come "le trasformazioni naturali [tra categorie] possano essere viste come modalità più generali di classificazione delle strategie di *networking* proposte in Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008),[2] sulla base della tipologia di "traduzione" a cui ricorrono" (p. 413).

Questo metodo permette di affrontare anche un importante problema gnoseologico riguardante il significato degli oggetti matematici. L'idea di fondo è l'interpretazione di un importante teorema, il cosiddetto Lemma di Yoneda, in base al quale il concetto categoriale di funtore rappresentabile consente di esprimere il fatto che la conoscenza pragmatica dell'oggetto, espressa attraverso la sua conoscenza in contesto, è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto. Questo significa che

> un oggetto (matematico) può essere interpretato attraverso (o sostituito da) le sue relazioni con il contesto, dove il contesto è costituito dalle relazioni con gli oggetti di una categoria a cui l'oggetto appartiene. Cioè la conoscenza pragmatica dell'oggetto, che si esprime attraverso la sua conoscenza in contesto, è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto. (p. 415)

Questa proprietà avvicina l'interpretazione categoriale qui affermata sul significato degli oggetti matematici a quelle date, in forma e tempi diversi, da Pierce e Wittgenstein: si afferma infatti un'interpretazione del significato in termini di:

> uso in contesto (reale o potenziale). L'uso di un oggetto (o gli effetti pratici che esso può produrre) sono pensabili solo attraverso le sue relazioni con altri oggetti

[2] Prediger, S, Bikner Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM: the international Journal on Mathematics Education, 40*(2), 165–178. doi 10.1007/s1185-008-0086-z

> ed è proprio questo aspetto che può essere interpretato in termini di *funtore rappresantabile*. (p. 415)

Tutto il capitolo 11 è sostanzialmente un itinerario verso la dimostrazione di questa proposizione, che può anche essere espressa in questa forma: "attraverso l'immersione di Yoneda è (...) possibile dimostrare [sotto opportune assunzioni] che tramite l'attribuzione di significato pragmatica all'oggetto, cioè attraverso la sua conoscenza in contesto, è possibile accedere a tutti i significati dell'oggetto e quindi conoscerlo completamente" (p. 419).

A questo punto gran parte del lavoro è fatto: non resta che definire l'OMSDM, nonché l'oggetto matematico a esso collegato tramite un linguaggio diagrammatico. Questo è fatto nel capitolo 12, in cui si esemplificano due casi specifici di categorie (la categoria in cui l'insieme di base è ridotto a un singoletto e una categoria in cui l'insieme di base è ordinato) e si illustrano le conseguenze di tali ipotesi sulle relazioni tra la dimensione formale degli oggetti matematici e la loro dimensione pragmatica nell'ambito della pratica matematica. Nel primo caso si ha una frattura totale fra gli aspetti analitici e quelli sintetici, nel secondo caso l'ordinamento permette di introdurre una dimensione dinamica nel modello (si possono ottenere infatti i modelli di Kripke, descritti successivamente nel cap. 13) ed esso è concretamente interpretabile con un costrutto semiotico usato in didattica della matematica, il *semiotic bundle* ([3]), in cui quelli che sono i suoi insiemi semiotici diventano prefasci nell'interpretazione categoriale.

La tesi si conclude con un approfondimento tecnico (cap. 13), in cui si espone, sempre con il linguaggio piano e il più possibile intuitivo cui M.A. ci ha abituati, una sintesi dello strumento principale della filosofia sintetica di F. Zalamea, raccontato dall'autore in un volume non ancora pubblicato al momento della stesura della tesi ([4]) e qui indicato con l'acronimo SKTR (dalle iniziali inglesi di: Prefascio (Sheave), Kripke, Topos, Riemann): esso corrisponde all'acronimo HKTR nel testo spagnolo di Zalamea (prefascio si dice Hace in quella lingua). Si tratta dell'approfondimento del modello di 'arpentage des brumes' proposto da Grothendieck così come è interpretato da Zalamea e cui M.A ha ampiamente attinto, come lei stessa esplicita.

In questo modo l'autrice è stata in grado di rispondere opportunamente alle tre domande di ricerca, poste all'inizio della trattazione, e che, in quanto pienamente soddisfatte, e opportunamente espresse in forma assertoria riassumono il contenuto del suo lavoro:

1. *Criteri cui deve soddisfare una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.*

---

[3] Arzarello, F. (2006). Semiosi as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), Semiotics, Culture and Mathematical Thinking [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 267–299.

[4] Nel frattempo esso è stato pubblicato: Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Bogotà: Universidad Nacional de Colombia.

2. *Elementi teorici per costruire un quadro teorico di riferimento che soddisfi i criteri del punto 1.*
3. *Definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica nel contesto teorico individuato (2) e che tenga conto dei criteri individuati (1).*

Conclude il lavoro una ricca bibliografia, che dimostra l'ampiezza della ricerca di Miglena Asenova, con cui mi complimento per l'ottimo lavoro fatto.

Invito pertanto caldamente coloro che si interessano ai problemi dell'insegnamento della matematica, e quanti amano i problemi fondazionali della matematica stessa, a leggere questo lavoro. La fatica che faranno li premierà certo con l'apertura di nuovi orizzonti di riflessione e di pensiero: è quanto è successo a me e auguro a tutti loro.